Κεφάλαιο 2

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Εφαρμογή από τον πραγματικό κόσμο
Η αεροπορική εταιρεία Frontier αγοράζει φθηνά καύσιμα

Ο ανεφοδιασμός ενός αεροσκάφους μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιαδήποτε από τις ενδιάμεσες στάσεις κατά μήκος μιας αεροπορικής διαδρομής. Οι τιμές των καυσίμων ποικίλλουν από στάση σε στάση και ενδεχόμενη εξοικονόμηση χρημάτων μπορεί να επιτευχθεί "γεμίζοντας" τις δεξαμενές του αεροσκάφους με επιπλέον καύσιμα σε μια φθηνότερη τοποθεσία προκειμένου αυτά να χρησιμοποιηθούν σε μεταγενέστερα σκέλη της διαδρομής. Το μειονέκτημα είναι πως το επιπλέον βάρος του αποθηκευμένου στη δεξαμενή καυσίμου απαιτεί μεγαλύτερη καύση βενζίνης. Γραμμικός προγραμματισμός (Linear Programming - LP) και ευρετικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τη βέλτιστη ποσότητα του αποθηκευμένου καυσίμου που εξισορροπεί το κόστος της υπερβολικής καύσης έναντι τις εξοικονόμησης στο κόστος καυσίμου. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε το 1981 και οδήγησε σε καθαρή εξοικονόμηση χρημάτων της τάξεως των 350000 δολαρίων ανά έτος. Με το κόστος των καυσίμων να αποτελεί το 15% με 20% του συνολικού κόστους, πολλές αεροπορικές εταιρείες χρησιμοποιούν τώρα λογισμικό σχετικό με τον ανεφοδιασμό των αεροσκαφών βασισμένο στο γραμμικό προγραμματισμό για αγορά καυσίμων. Λεπτομέρειες για τη μελέτη μπορούν να βρεθούν στη Μελέτη Περίπτωσης 2 του Κεφαλαίου 22.

2-1 Μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών

Αυτή η ενότητα πραγματεύεται τη γραφική λύση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών. Αν και τέτοια προβλήματα δύο μεταβλητών σπάνια εμφανίζονται στην πράξη, η θεώρηση παρέχει συγκεκριμένα ερείσματα για την ανάπτυξη του γενικού αλγορίθμου simplex που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3 και επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού πολύ μεγάλου μεγέθους.

Παράδειγμα 2.1-1 Η εταιρεία Reddy Mikks

Η Reddy Mikks παράγει χρώματα τόσο εσωτερικού όσο και εξωτερικού χώρου χρησιμοποιώντας δύο πρώτες ύλες $M1$ και $M2$. Ο πίνακας της επόμενης σελίδας περιέχει τα βασικά δεδομένα του προβλήματος:

Η ημερήσια ζήτηση για τα χρώματα εσωτερικού περιορίζεται σε δύο τόνους την ημέρα, ενώ ταυτόχρονα, η παραγωγή χρωμάτων εσωτερικού χώρου δεν μπορεί να ξεπεράσει την αντίστοιχη παραγωγή για τα χρώματα εξωτερικού κατά περισσότερο από έναν τόνο. Η Reddy Mikks επιθυμεί να καθορίσει το βέλτιστο (δηλαδή τον καλύτερο) συνδυασμό παραγωγής των χρωμάτων εσωτερικού και εξωτερικού χώρου που μεγιστοποιεί το συνολικό ημερήσιο κέρδος.

Όλα τα μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας, συμπεριλαμβανομένου και του γραμμικού προγραμματισμού, αποτελούνται από τρεις θεμελιώδεις συνιστώσες:

1. Τις **μεταβλητές απόφασης** που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε.
2. Τον **αντικειμενικό στόχο** (σκοπό) που χρειάζεται να βελτιστοποιήσουμε (μεγιστοποιώ ή ελαχιστοποιώ).
3. Τους **περιορισμούς** που πρέπει να ικανοποιεί η λύση.

Ο κατάλληλος ορισμός των μεταβλητών απόφασης συνιστά ένα ουσιαστικό πρώτο βήμα για την ανάπτυξη του μοντέλου. Από τη στιγμή που γίνεται, η διαδικασία προσδιορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και των περιορισμών, γίνεται πιο ξεκάθαρη. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις μεταβλητές, θα πρέπει να διατυπώσουμε το ακόλουθο ερώ-

	Τόνοι πρώτης ύλης ανά τόνο		
	εξωτερικού χρώματος	εσωτερικού χρώματος	Μέγιστη ημερήσια διαθεσιμότητα (σε τόνους)
Πρώτη ύλη $M\,1$	6	4	24
Πρώτη ύλη $M\,2$	1	2	6
Κέρδος ανά τόνο ($1000)	5	4	

τημα: Ποιοι είναι οι **άγνωστοι** του προβλήματος απόφασης; Για το συγκεκριμένο πρόβλημα της Reddy Mikks, χρειάζεται να καθορίσουμε τις ημερήσιες ποσότητες προς παραγωγή για τα χρώματα εσωτερικού και εξωτερικού χώρου. Επομένως, οι μεταβλητές του μοντέλου ορίζονται ως

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{τόνοι ημερήσιας παραγωγής χρωμάτων εξωτερικών χώρων} \\ x_2 &= \text{τόνοι ημερήσιας παραγωγής χρωμάτων εσωτερικών χώρων} \end{aligned}$$

Ο στόχος της Reddy Mikks είναι η *μεγιστοποίηση* (δηλαδή η αύξηση στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό) του συνολικού ημερήσιου κέρδους και των δύο τύπων χρωμάτων. Οι δύο συνιστώσες του συνολικού ημερήσιου κέρδους εκφράζονται συναρτήσει των μεταβλητών x_1 και x_2 ως

$$\begin{aligned} \text{Κέρδος από τα χρώματα εσωτερικών χώρων} &= 5x_1 \text{ (χιλιάδες) δολάρια} \\ \text{Κέρδος από τα χρώματα εξωτερικών χώρων} &= 4x_2 \text{ (χιλιάδες) δολάρια} \end{aligned}$$

Θέτοντας το z να εκφράζει το συνολικό ημερήσιο κέρδος (σε χιλιάδες δολάρια), ο στόχος της Reddy Mikks γράφεται ως

$$\text{Μεγιστοποίησε } z = 5x_1 + 4x_2$$

Στο επόμενο βήμα κατασκευάζουμε τους περιορισμούς που περιορίζουν τη χρήση πρώτης ύλης και τη ζήτηση του προϊόντος. Οι περιορισμοί για τις πρώτες ύλες, σε μία λεκτική διατύπωση εκφράζονται ως

$$\begin{pmatrix} \text{Χρήση πρώτων υλών} \\ \text{και για τους δύο τύπους χρωμάτων} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{Μέγιστη διαθεσιμότητα} \\ \text{σε πρώτες ύλες} \end{pmatrix}$$

Η καθημερινή χρήση της πρώτης ύλης $M1$ είναι 6 τόνοι ανά τόνο χρώματος εξωτερικού χώρου και 4 τόνοι ανά τόνο χρώματος εσωτερικού χώρου. Συνεπώς

$$\text{Χρήση πρώτης ύλης } M1 \text{ και για τους δύο τύπους χρωμάτων} = 6x_1 + 4x_2 \frac{\text{τόνοι}}{\text{ημέρα}}$$

Με παρόμοιο τρόπο,

$$\text{Χρήση πρώτης ύλης } M2 \text{ και για τους δύο τύπους χρωμάτων} = 1x_1 + 2x_2 \frac{\text{τόνοι}}{\text{ημέρα}}$$

Οι μέγιστες ημερήσιες διαθεσιμότητες των πρώτων υλών $M1$ και $M2$ που είναι 24 και 6 τόνοι αντίστοιχα, ορίζουν τις αντίστοιχε ποσότητες του δεξιού μέλους για τους δύο περιορισμούς, οδηγώντας στις συνθήκες

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \text{ (για την πρώτη ύλη } M1) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \text{ (για την πρώτη ύλη } M2) \end{aligned}$$

Ο ένας από τους περιορισμούς ς περί της ζήτησης των προϊόντων ορίζει σαφώς πως η ημερήσια παραγωγή των χρωμάτων εσωτερικού χώρου δεν μπορεί να ξεπεράσει την παραγωγή των χρωμάτων εξωτερικού χώρου περισσότερο από ένα τόνο, περιορισμός που μετουσιώνεται ως

$$x_2 - x_1 \leq 1 \quad \text{(όριο αγοράς)}$$

Ο δεύτερος περιορισμός περιορίζει την ημερήσια ζήτηση των χρωμάτων εσωτερικού χώρου στους 2 τόνους:

$$x_2 \leq 2 \quad \text{(όριο ζήτησης)}$$

Ένας αυτονόητος (ή "όντως αντιληπτός") περιορισμός απαιτεί όλες οι μεταβλητές x_1 και x_2 να παίρνουν μόνο μηδενικές ή θετικές τιμές. Οι περιορισμοί που διατυπώνονται ως $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ αναφέρονται ως **περιορισμοί μη αρνητικότητας**.

Το πλήρες μοντέλο της Reddy Mikks είναι

$$\text{Μεγιστοποίησε } z = 5x_1 + 4x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad (1)\\ x_1 + 2x_2 &\leq \ 6 \quad (2)\\ -x_1 + \ x_2 &\leq \ 1 \quad (3)\\ x_2 &\leq \ 2 \quad (4)\\ x_1, x_2 &\geq \ 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Όλες οι τιμές των παραμέτρων x_1 και x_2 που ικανοποιούν *και τους πέντε* αυτούς περιορισμούς συνιστούν μία **εφικτή λύση**. Στην αντίθετη περίπτωση, η λύση θεωρείται **μη εφικτή**. Για παράδειγμα, η λύση $x_1 = 3$ τόνοι ανά ημέρα και $x_2 = 1$ τόνος ανά ημέρα, είναι εφικτή, επειδή δεν παραβιάζει *κανέναν* από τους πέντε περιορισμούς. Αυτό το αποτέλεσμα επαληθεύεται πραγματοποιώντας την αντικατάσταση $(x_1 = 3, x_2 = 1)$ στο αριστερό μέλος του κάθε περιορισμού. Στον περιορισμό (1) έχουμε $6x_1+4x_2 = 6\times3+4\times1 = 22$, τιμή που είναι μικρότερη από το δεξί μέλος του περιορισμού (=24), ενώ οι περιορισμοί 2 έως 5 ελέγχονται με παρόμοιο τρόπο (επαληθεύστε το!). Από την άλλη πλευρά, η λύση $x_1 = 4$ και $x_2 = 1$ είναι μη εφικτή, επειδή δεν ικανοποιεί τουλάχιστον έναν περιορισμό. Για παράδειγμα, στον περιορισμό (1), $6 \times 4 + 4 \times 1 = 28$, τιμή που είναι μεγαλύτερη από αυτή που βρίσκεται στο δεξί μέρος του περιορισμού (=24).

Η λύση στο πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού αναζητά το **βέλτιστο** σημείο, δηλαδή τις καλύτερες *εφικτές* τιμές των μεταβλητών x_1 και x_2 που μεγιστοποιούν το συνολικό κέρδος z. Η γραφική μέθοδος του Κεφαλαίου 2 και η αλγεβρική της γενίκευση του Κεφαλαίου 3 επιδεικνύουν τον τρόπο προσέγγισης της βέλτιστης λύσης μέσα σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων (παρά το γεγονός ότι όπως εξετάζεται στη συνέχεια, ο **χώρος των λύσεων** χαρακτηρίζεται από άπειρο πλήθος εφικτών σημείων).

2-2 Η γραφική λύση του μοντέλου LP

Η γραφική λύση του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνει δύο βήματα:

1 Προσδιορισμός του χώρου των εφικτών λύσεων.

2 Προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης ανάμεσα σε όλα τα σημεία του χώρου των λύσεων.

Η παρουσίαση χρησιμοποιεί δύο παραδείγματα για να δείξει τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούμε τις αντικειμενικές συναρτήσεις μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης.

2-2.1 Επίλυση ενός μοντέλου μεγιστοποίησης

Παράδειγμα 2.1-2

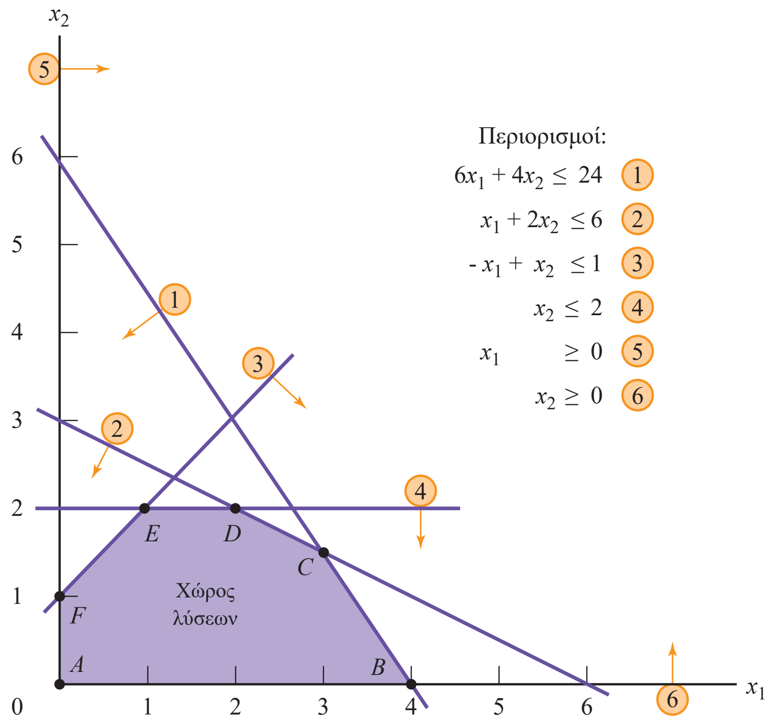
Αυτό το παράδειγμα επιλύει το μοντέλο της Reddy Mikks του Παραδείγματος 2.1-1.

Βήμα 1 *Προσδιορισμός του χώρου των εφικτών λύσεων:*

Το αρχικό στάδιο για τον προσδιορισμό του χώρου των λύσεων, είναι να απεικονίσουμε τις δύο μεταβλητές σε ένα διάγραμμα X-Y με τον οριζόντιο άξονα να αναπαριστά το x_1 και τον κατακόρυφο άξονα να αναπαριστά το x_2. Αυτή η αναπαράσταση υποδιαιρεί το χώρο του γραφήματος σε τέσσερα τεταρτημόρια εκ των οποίων το πρώτο και πιο συγκεκριμένα αυτό που βρίσκεται πάνω από τον άξονα του x_1 και δεξιά από τον άξονα του x_2 είναι και αυτό που μας ενδιαφέρει, επειδή αποτελεί τη μόνη περιοχή που ικανοποιεί τις συνθήκες της μία αρνητικότητας (5) $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$. Το Σχήμα 2-1 επιδεικνύει ακριβώς αυτή τη διαμέριση.

Για να εξηγήσουμε τους υπόλοιπους περιορισμούς, αντικαθιστούμε αρχικά κάθε ανισότητα με μία εξίσωση και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία γραμμή που θα προκύψει, προσδιορίζοντας δύο διακριτά σημεία της. Για παράδειγμα, μετά την αντικατάσταση της ανισότητας $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ με την εξίσωση $6x_1 + 4x_2 = 24$, προσδιορίζονται δύο διακριτά σημεία θέτοντας $x_1 = 0$ για να λάβουμε $x_2 = 24/4 = 6$ και στη συνέχεια θέτοντας $x_2 = 0$ για να λάβουμε $x_1 = 24/6 = 4$. Επομένως, η ευθεία $6x_1 + 4x_2 = 24$, διέρχεται από τα σημεία (0,6) και (4,0) όπως φαίνεται από τη γραμμή (1) του Σχήματος 2-1.

Στη συνέχεια, ας εξετάσουμε την κατεύθυνση ($>$ ή $<$). Αυτή η κατεύθυνση διαιρεί το επίπεδο (x_1, x_2) σε δύο ημιεπίπεδα, ένα σε κάθε πλευρά της σχεδιασμένης γραμμής. Μόνον ένα από αυτά τα δύο ημιεπίπεδα ικανοποιεί την ανισότητα. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την εφικτή περιοχή του χώρου των λύσεων, αρχικά χαρακτηρίζουμε οποιοδήποτε σημείο το οποίο δεν κείται επί της ευθείας γραμμής, ως ένα σημείο αναφοράς. Στην περίπτωση αυτή,



Σχήμα 2-1 Χώρος εφικτών λύσεων του μοντέλου της Reddy Mikks.

το τμήμα του επιπέδου που περιέχει το σημείο αναφοράς, βρίσκεται στην πλευρά των εφικτών λύσεων. Από την υπολογιστική πλευρά του θέματος, είναι πιο εξυπηρετικό να χρησιμοποιήσουμε την αρχή του συστήματος των αξόνων δηλαδή το σημείο $(0, 0)$ ως ένα σημείο αναφοράς, επειδή στην περίπτωση αυτή, η έκφραση του αριστερού μέλους είναι πάντοτε ίση με το μηδέν. Προκειμένου να επιδείξουμε αυτή την ιδέα, ας αντικαταστήσουμε το σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$ στην εξίσωση του περιορισμού $6x_1 + 4x_2 \le 24$, λαμβάνοντας μηδενική τιμή στο αριστερό μέλος του περιορισμού $(6 \times 0 + 4 \times 0 = 0)$, η οποία φυσικά είναι μικρότερη από 24. Κατά συνέπεια, αυτή η περιοχή του χώρου που περιέχει το σημείο $(0, 0)$, χαρακτηρίζεται ως εφικτή για την ανισότητα (1), όπως καταδεικνύεται από την κατεύθυνση του βέλους στο Σχήμα 2-1[1].

Η εφαρμογή αυτής της διαδικασίας του σημείου αναφοράς στους υπόλοιπους περιορισμούς του μοντέλου, δημιουργεί τους περιορισμούς που απεικονίζονται στο Σχήμα 2-1 (επαληθεύστε το!). Ο χώρος των εφικτών λύσεων αποτελεί την περιοχή του πρώτου τεταρτημορίου που ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς συμπεριλαμβανομένων και τους περιορισμούς της μη αρνητικότητας. Στο Σχήμα 2-1 όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ή στο όριο της περιοχής ABCDEF ορίζουν ένα τέτοιο χώρο. Αντίθετα, όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω από το όριο αυτής της περιοχής ABCDEF, είναι μη εφικτά.

Βήμα 2 *Προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης:*

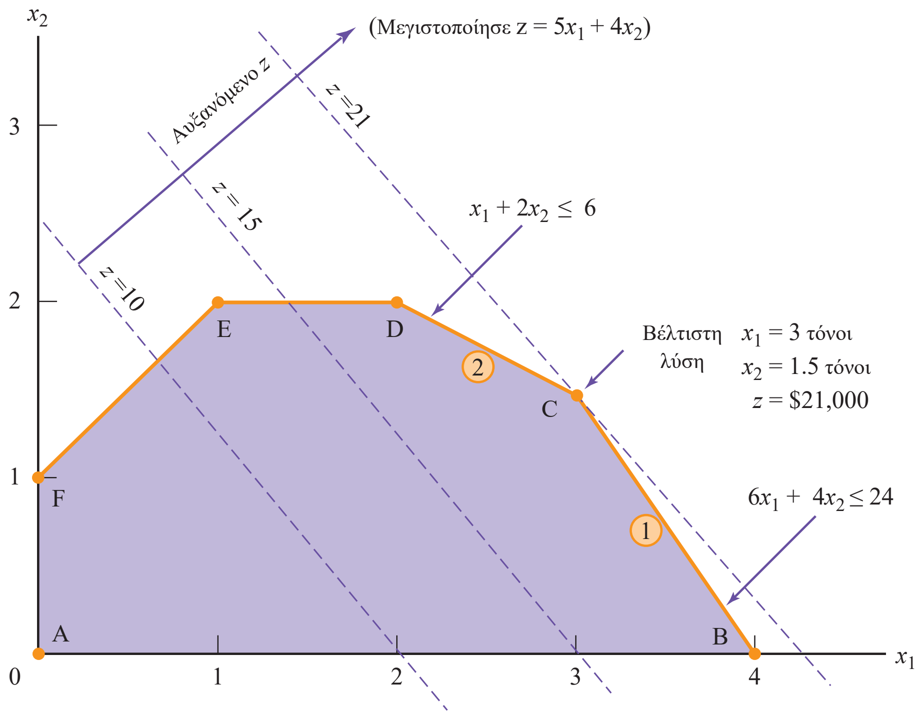
Το πλήθος των σημείων του χώρου εφικτών λύσεων *ABCDEF* στο Σχήμα 2-1 που αποτελούν λύσεις του προβλήματος, είναι *άπειρο*, κάτι που φυσικά αποκλείει τη δυνατότητα χρήσης μιας εξονυχιστικής απαρίθμησης και υποδεικνύει τη χρήση μιας συστηματικής διαδικασία για τον προσδιορισμό του βέλτιστου (εφικτού) σημείου.

Καταρχήν, η κατεύθυνση προς την οποία αυξάνει η συνάρτηση κέρδους $z = 5x_1 + 4x_2$, καθορίζεται αναθέτοντας αυθαίρετα *αυξανόμενες* τιμές στο z (θυμηθείτε πώς *μεγιστοποιούμε* το z). Για παράδειγμα, για τις τιμές $z = 10$ και $z = 15$, οι δύο γραμμές που περιγράφονται από τις εξισώσεις $5x_1 + 4x_2 = 10$ και $5x_1 + 4x_2 = 15$, προσδιορίζουν την κατεύθυνση προς την οποία το z αυξάνει, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2-2. Κινούμενοι με τον τρόπο αυτό, η αναζήτηση σταματά στο σημείο C, επειδή οποιαδήποτε περαιτέρω αύξηση στο z θα καταστήσει τη λύση μη εφικτή. Κατά συνέπεια, το C αποτελεί τη βέλτιστη λύση.

Οι τιμές των x_1 και x_2 προσδιορίζονται αλγεβρικά αναγνωρίζοντας πως το σημείο C αποτελεί το σημείο τομής των γραμμών (1) και (2) και προκύπτουν επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

[1]Η χρήση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων σε ένα σημείο αναφοράς λειτουργεί με τον σωστό τρόπο, υπό την προϋπόθεση πως το σημείο $(0, 0)$ δεν ανήκει στην ευθεία γραμμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό άλλα σημεία αναφοράς, παρά το γεγονός ότι αυτό οδηγεί σε πρόσθετους υπολογισμούς (δείτε το Παράδειγμα 2.2-2)



Σχήμα 2-2 Βέλτιστη λύση του μοντέλου της Reddy Mikks.

Η λύση είναι $x_1 = 3$ και $x_2 = 1.5$ με $z = 5 \times 4 + 4 \times 1.5 = 21$. Αυτή απαιτεί την καθημερινή παραγωγή ενός συνδυασμού 3 τόνων χρωμάτων εξωτερικού χώρου και 1.5 τόνου χρωμάτων εσωτερικού χώρου. Το συσχετιζόμενο ημερήσιο κέρδος είναι ίσο με 21 χιλιάδες δολάρια.

Παρατηρήσεις. Στην πράξη, ένα τυπικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να περιλαμβάνει εκατοντάδες ή χιλιάδες μεταβλητές και σταθερές. Για ποιο λόγο τότε αξίζει να μελετήσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα που χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη δύο μόνο μεταβλητών; Η απάντηση είναι πως η γραφική επίλυση μας προσφέρει ένα πάρα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα: *Η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, εάν υπάρχει, σχετίζεται πάντοτε με ένα* ***γωνιακό σημείο*** *του χώρου των λύσεων, περιορίζοντας με τον τρόπο αυτό την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης από ένα άπειρο πλήθος εφικτών σημείων σε ένα πεπερασμένο πλήθος γωνιακών σημείων.* Αυτό το πανίσχυρο αποτέλεσμα αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη της γενικής αλγεβρικής μεθόδου της simplex που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3.

Προκειμένου να ισχυροποιήσουμε ακόμη περισσότερο τον ισχυρισμό πως η βέλτιστη λύση σχετίζεται πάντοτε με ένα γωνιακό σημείο, ο επόμενος πίνακας περιέχει διάφορες αντικειμενικές συναρτήσεις για το μοντέλο της Reddy Mikks και τα σχετιζόμενα βέλτιστα γωνιακά σημεία. Παρατηρήστε πως η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση επιτρέπει την επίσκεψη όλων των γωνιακών σημείων του χώρου των λύσεων.

Αντικειμενική συνάρτηση για το μοντέλο της Reddy Mikks αρχείο toraEx2.2-1.txt	Βέλτιστο γωνιακό σημείο στο Σχήμα 2.2
$z = 5x_1 + x_2$	*B*
$z = 5x_1 + 4x_2$	*C*
$z = x_1 + 3x_2$	*D*
$z = -x_1 + 2x_2$	*E*
$z = -2x_1 + x_2$	*F*
$z = -x_1 - x_2$	*A*

Η TORA είναι ιδιαίτερα εξυπηρετική για την επαλήθευση της λίστας των βέλτιστων γωνιακών σημείων που περιλαμβάνεται στον παραπάνω πίνακα. Φορτώστε το αρχείο toraEx2.2-1.txt. Επιλέξτε View/Modify Input Data για να τροποποιήσετε τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και να ξαναλύσετε το πρόβλημα με γραφικό τρόπο.

2-2.2 Επίλυση ενός μοντέλου ελαχιστοποίησης

Παράδειγμα 2.2-2 Πρόβλημα διαιτολογίου

Οι φάρμες Ozark χρησιμοποιούν καθημερινά τουλάχιστον 800 λίβρες ειδικής τροφής. Η ειδική τροφή είναι μείγμα καλαμποκιού και γεύματος σόγιας με την ακόλουθη σύνθεση:

	Λίβρες ανά λίβρα ζωοτροφών		
Ζωοτροφές	Πρωτεΐνη	Ίνα	Κόστος ($ ανά λίβρα)
Καλαμπόκι	0.09	0.02	0.30
Γεύμα σόγιας	0.60	0.06	0.90

Οι διαιτολογικές απαιτήσεις για αυτό το ειδικό φαγητό είναι τουλάχιστον 30% πρωτεΐνη και το πολύ 5% ίνα. Ο στόχος είναι να καθορίσουμε τη σύνθεση τροφής που οδηγεί στο ελάχιστο ημερήσιο κόστος.

Οι μεταβλητές απόφασης του μοντέλου είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{λίβρες καλαμποκιού στο ημερήσιο μείγμα} \\ x_2 &= \text{λίβρες γεύματος σόγιας στο ημερήσιο μείγμα} \end{aligned}$$

Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό ημερήσιο κόστος (σε δολάρια) του μείγματος τροφών:

$$\text{Ελαχιστοποίησε } z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

Οι περιορισμοί απεικονίζουν την ημερήσια ποσότητα του μείγματος τροφών και τις διαιτολογικές απαιτήσεις. Οι φάρμες Ozark χρειάζονται τουλάχιστον 800 λίβρες τροφής σε καθημερινή βάση - δηλαδή

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

Η ποσότητα της πρωτεΐνης που περιλαμβάνεται στις x_1 λίβρες καλαμποκιού και στις x_2 λίβρες γεύματος σόγιας είναι ίση με $(0.09x_1 + 0.6x_2)$ λίβρες. Αυτή η ποσότητα θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το 30% του συνολικού μείγματος τροφής - δηλαδή,

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$$

Με ανάλογο τρόπο, οι απαιτήσεις σε ίνες κατά μέγιστο 5% διατυπώνονται ως

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$$

Παραδοσιακά, οι περιορισμοί απλοποιούνται μετακινώντας τους όρους που περιέχουν το x_1 και το x_2 στο αριστερό μέρος της κάθε ανισότητας, αφήνοντας στο δεξί μέρος μόνο μια σταθερά. Το πλήρες μοντέλο είναι

$$\text{Ελαχιστοποίησε } z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

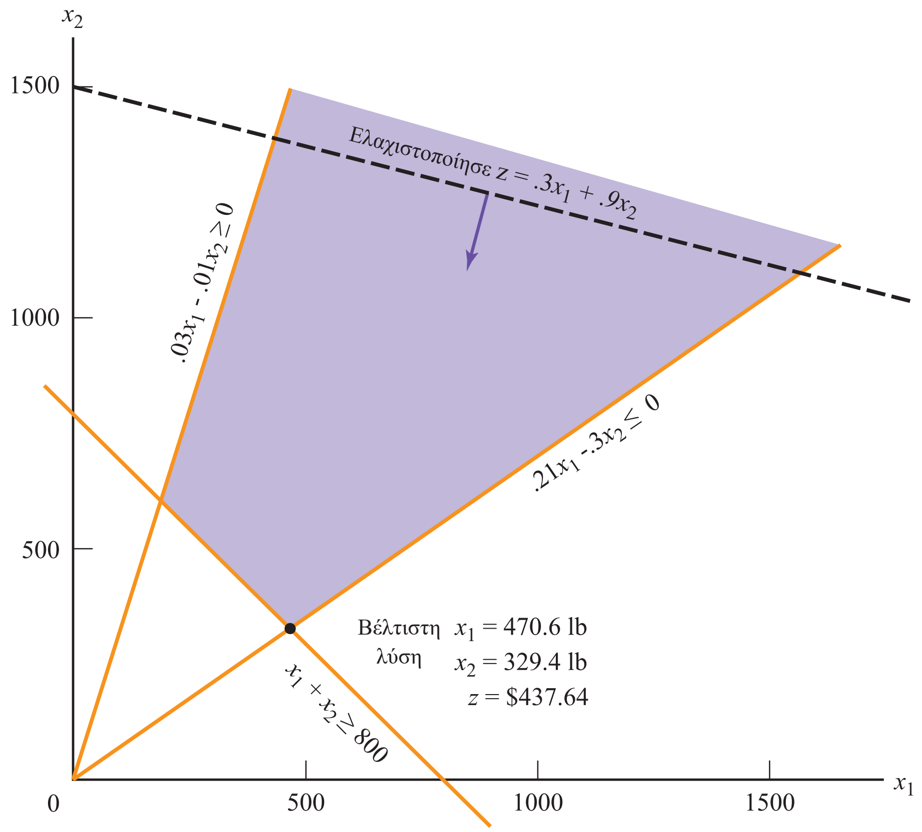
υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 800 \\ 0.21x_1 - 0.30x_2 &\leq 0 \\ 0.03x_1 - 0.01x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Το Σχήμα 2-3 παρουσιάζει τη γραφική λύση του μοντέλου. Ο δεύτερος και ο τρίτος περιορισμός διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Επομένως, σε αντίθεση με το Παράδειγμα 2.2-1 του μοντέλου Reddy Mikks, ο προσδιορισμός των εφικτών ημι-χώρων αυτών των δύο περιορισμών, απαιτεί τη χρήση ενός σημείου αναφοράς διαφορετικού από το σημείο (0,0) [π.χ. (100,0) ή (0,100)].

Λύση. Το μοντέλο ελαχιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ελαττώνοντας το z στην κατεύθυνση που απεικονίζεται στο Σχήμα 2-3. Η βέλτιστη λύση είναι η τομή των δύο ευθειών $x_1 + x_2 = 800$ και $0.21x_1 - 0.3x_2 = 0$ που οδηγεί στο αποτέλεσμα $x_1 = 470.6$ λίβρες και $x_2 = 329.4$ λίβρες. Το ελάχιστο κόστος του μείγματος τροφών είναι $z = 0.3 \times 470.6 + 0.9 \times 329.4 = 437.64$ δολάρια την ημέρα.

Παρατηρήσεις. Ίσως κάποιος αναρωτηθεί για ποιο λόγο ο περιορισμός $x_1 + x_2 \geq 800$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί από την εξίσωση $x_1 + x_2 = 800$ επειδή η παραγωγή περισσότερης από την ελάχιστη ποσότητα δεν θα ήταν βέλτιστη λύση. Αν



Σχήμα 2-3 Η γραφική επίλυση του μοντέλου διατροφής.

και η λύση του συγκεκριμένου μοντέλου ικανοποίησε αυτήν την εξίσωση, ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο ίσως να επιβάλει πρόσθετους περιορισμούς που θα απαιτούσαν την ανάμειξη ποσοτήτων μεγαλύτερων των ελαχίστων. Το πιο σημαντικό από όλα είναι, πως η ασθενής ανισότητα ($\geq$), εξ ορισμού, περιλαμβάνει την περίπτωση της ισότητας και έτσι η εξίσωση ($=$) μπορεί να επιλεγεί εάν η βελτιστότητα το απαιτεί. Το γενικό συμπέρασμα για κάθε μοντέλο επιχειρησιακής έρευνας, είναι πως δεν θα μπορούσε κάποιος να "μαντέψει εκ των προτέρων" τη λύση επιβάλλοντας εκ των προτέρων τον πρόσθετο περιορισμό της ισότητας.

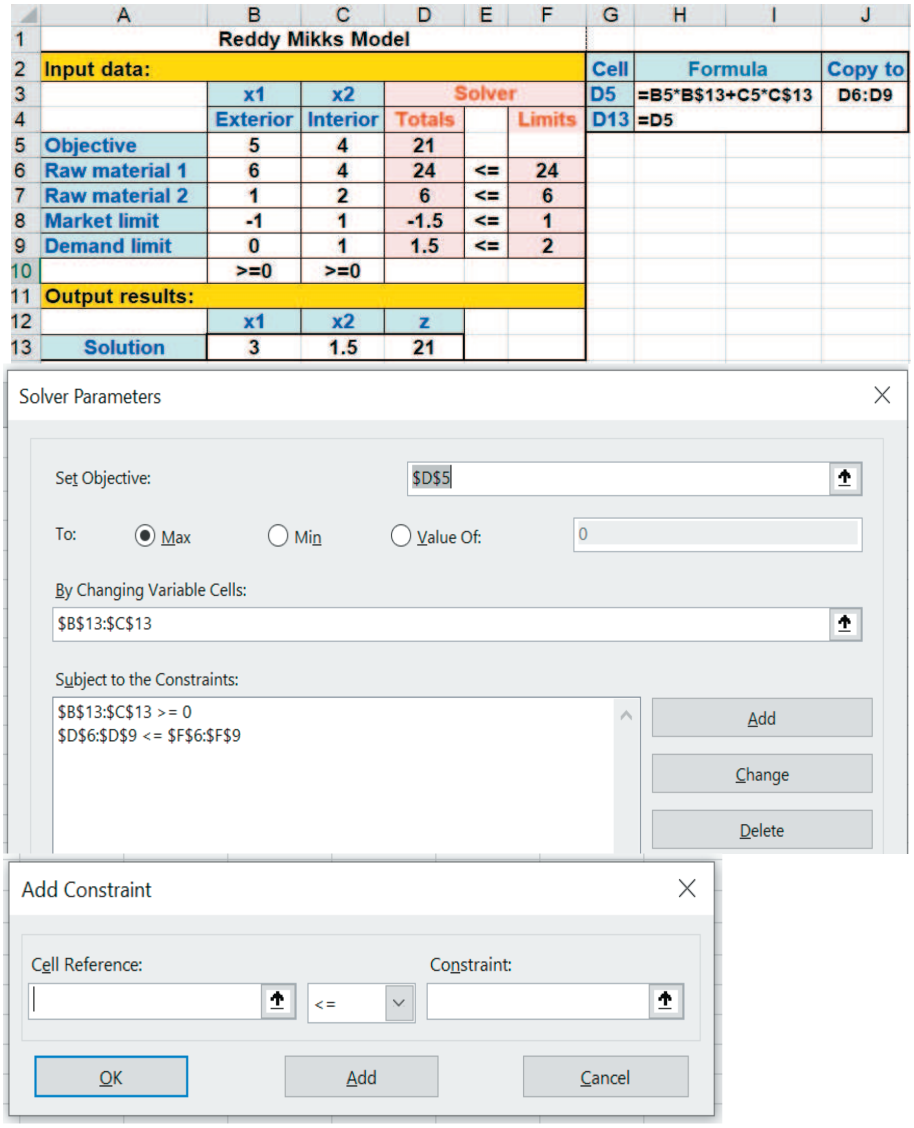
2-3 Υπολογιστική λύση με τα Solver και AMPL

Στην πράξη, όπου τα τυπικά μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να περιλαμβάνουν χιλιάδες μεταβλητών και περιορισμών, ο υπολογιστής είναι ο μοναδικός εφικτός χώρος για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η ενότητα αυτή παρουσιάζει δύο ευρέως χρησιμοποιούμενες εφαρμογές λογισμικού: το Excel Solver και το AMPL. Το Solver είναι ιδιαίτερα ελκυστικό σε χρήστες υπολογιστικών φύλλων. Το AMPL είναι μία αλγεβρική γλώσσα μοντελοποίησης, η οποία όπως όλες οι γλώσσες προγραμματισμού υψηλού επιπέδου, απαιτεί μεγαλύτερη εμπειρία. Παρόλα αυτά, το AMPL και οι παρόμοιες γλώσσες[1] προσφέρει μεγάλη ευελιξία μοντελοποίησης. Αν και η παρουσίαση σε αυτήν την ενότητα επικεντρώνεται στο γραμμικό προγραμματισμό, οι εφαρμογές AMPL και Solver μπορούν να διαχειριστούν προβλήματα ακέραιου και μη γραμμικού προγραμματισμού, όπως θα δούμε αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια.

2-3.1 Επίλυση προβλημάτων LP με το Excel Solver

Στο Excel Solver το υπολογιστικό φύλλο αποτελεί το μέσο εισαγωγής δεδομένων και εξόδου αποτελεσμάτων για το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Η Εικόνα 2-4 παρουσιάζει τη διάταξη των δεδομένων για το μοντέλο Reddy Mikks (αρχείο *solverRM1.xls*). Το επάνω μέρος του σχήματος περιλαμβάνει τέσσερα είδη πληροφοριών: (1) κελιά με δεδομένα εισόδου (B5:C9 και F6:F9), (2) κελιά που αναπαριστούν τις μεταβλητές και την αντικειμενική συνάρτηση (B13:D13), (3) αλγεβρικούς ορισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης και τα αριστερά μέρη των περιορισμών (κελιά D5:D9) και (4) κελιά που παρέχουν επεξηγηματικά ονόματα ή σύμβολα. Το Solver απαιτεί μόνο τους τρεις πρώτους τύπους. Ο τέταρτος τύπος

[1] Άλλα γνωστά εμπορικά πακέτα περιλαμβάνουν τις γλώσσες AIMMS, GAMS, LINGO, MPL, OPL Studio, και Xpress-Mosel.



Σχήμα 2-4 Ορίζοντας το μοντέλο της Reddy Mikks με τη βοήθεια του Excel Solver (αρχείο *solverRM1.xls*)

απλά βελτιώνει την αναγνωσιμότητα, χωρίς όμως να εξυπηρετεί κάποιον άλλο σκοπό. Η σχετική θέση αυτών των τεσσάρων τύπων πληροφοριών (όπως προτείνεται στην Εικόνα 2-4) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατάλληλη παραπομπή των κελιών στο Solver και η χρήση της, συνιστάται.

Με ποιο τρόπο το Solver συνδέεται με τα δεδομένα του υπολογιστικού φύλλου; Αρχικά, παρέχουμε "αλγεβρικούς" ορισμούς για την αντικειμενική συνάρτηση και τα αριστερά μέλη των περιορισμών χρησιμοποιώντας τα δεδομένα εισόδου (κελιά B5:C9 και F6:F9) και για την αντικειμενική συνάρτηση και τις μεταβλητές (κελιά B13:D13). Στη συνέχεια τοποθετούμε κατάλληλα τους προκύπτοντες τύπους στα κελιά D5:D9, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	Αλγεβρική έκφραση	Τύπος στο υπολογιστικό φύλλο	Καταχωρημένος στο κελί
Στόχος z	$5x_1 + 4x_2$	=B5*$B$13+C5*$C$13	D5
Περιορισμός 1	$6x_1 + 4x_2$	=B6*$B$13+C6*$C$13	D6
Περιορισμός 2	$x_1 + 2x_2$	=B7*$B$13+C7*$C$13	D7
Περιορισμός 3	$-x_1 + x_2$	=B8*$B$13+C8*$C$13	D8
Περιορισμός 4	$0x_1 4x_2$	=B9*$B$13+C9*$C$13	D9

Στην πραγματικότητα, χρειάζεται μόνο να καταχωρήσετε τον τύπο για το κελί D5 και στη συνέχεια να τον αντιγράψετε στα κελιά D6:D9. Για να γίνει σωστά, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε *αμετάβλητη συσχέτιση* των κελιών που συμβολίζουν τις μεταβλητές x_1 και x_2 (δηλαδή $B$13 και $C$13 αντίστοιχα).

Οι ρητοί τύποι που μόλις περιγράφτηκαν, δεν είναι πρακτικοί για μεγάλα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Αντίθετα, ο τύπος στο κελί D5 μπορεί να γραφεί συμπαγώς ως

$$= \text{SUMPRODUCT(B5:C5,\$B\$13:\$C\$13)}$$

Ο νέος τύπος μπορεί στη συνέχεια να αντιγραφεί στα κελιά D6:D9.

Όλα τα στοιχεία του μοντέλου LP, είναι τώρα έτοιμα να φέρουν εις πέρας το μοντέλο. Από τη γραμμή επιλογών του υπολογιστικού φύλλου επιλέγουμε Solver[1] για να αποκτήσουμε πρόσβαση στο πλαίσιο διαλόγου **Solver Parameters** που εμφανίζεται στο μέσο της Εικόνας 2-4. Στη συνέχεια, ενημερώνουμε το πλαίσιο διαλόγου με τον ακόλουθο τρόπο:

Set Target Cell: $D$5
Equal to: ⊙ Max
By Changing Cells: $B$13:$C$13

Η πληροφόρηση γνωστοποιεί στο Solver ότι οι μεταβλητές του μοντέλου LP (κελιά $B$13 και $C$13) προσδιορίζονται μεγιστοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση που βρίσκεται στο κελί $D$5.

Για να δημιουργήσουμε τους περιορισμούς, επιλέγουμε Add στο πλαίσιο διαλόγου για να εμφανίσουμε το πλαίσιο διαλόγου **Add Constraint** (δείτε το κάτω μέρος της Εικόνας 2-4) και στη συνέχεια, καταχωρούμε το αριστερό μέλος, τον τύπο της ανίσωσης και το δεξί μέλος του περιορισμού ως[2]

$$\$D\$6 : \$D\$9 <= F\$6 : \$F\$9$$

Για τους περιορισμούς μη αρνητικότητας επιλέγουμε Add ακόμα μια φορά και εισάγουμε

$$\$B\$13 : \$C\$13 >= 0$$

Ένας άλλος τρόπος για να εισάγουμε περιορισμούς μη αρνητικότητας, είναι να επιλέξουμε Options στο πλαίσιο **Solver Parameters** για να αποκτήσουμε πρόσβαση στο **Solver Options**. Μιλώντας γενικά, οι προεπιλεγμένες ρυθμίσεις στην Εικόνα 2-5 δεν χρειάζεται να τροποποιηθούν. Ωστόσο, η προεπιλεγμένη ακρίβεια του 0.000001 ίσως να είναι πολύ υψηλή για κάποια προβλήματα, και ίσως η εφαρμογή επιστρέψει εσφαλμένα το μήνυμα “Solver could not find a feasible solution” (“Το Solver δεν μπόρεσε να βρει μια εφικτή λύση”). Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται να καθοριστεί μικρότερη ακρίβεια (δηλαδή μεγαλύτερη τιμή). Εάν το μήνυμα επιμένει, τότε κατά πάσα πιθανότητα το πρόβλημα είναι μη εφικτό.

Τα περιγραφικά ονόματα περιοχών στο Excel, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αυξήσουν την αναγνωσιμότητα. Μία περιοχή δημιουργείται φωτίζοντας τα επιθυμητά κελιά, πληκτρολογώντας το όνομα της περιοχής στο άνω αριστερό πλαίσιο του φύλλου, και στη συνέχεια πατώντας Return. Η Εικόνα 2-6 (αρχείο *solverRM2.xls*) παρέχει τις λεπτομέρειες μαζί με μία σύνοψη των ονομάτων περιοχών που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο. Το μοντέλο θα πρέπει να συγκριθεί με εκείνο του αρχείου *solverRM1.xls* για να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι περιοχές χρησιμοποιούνται στους τύπους.

Προκειμένου να επιλύσουμε το πρόβλημα, επιλέγουμε Solve στο πλαίσιο διαλόγου **Solver Parameters**. Ένα νέο πλαίσιο διαλόγου, **Solver Results**, δίνει τότε την κατάσταση της λύσης. Εάν το μοντέλο έχει καταχωρηθεί σωστά, η βέλτιστη τιμή του z θα εμφανίζεται στο κελί D5 και οι τιμές των x_1 και x_2 θα εμφανιστούν στα κελιά B13 και C13, αντίστοιχα. Για λόγους ευκολίας, το κελί D13 παρουσιάζει τη βέλτιστη τιμή του z, καταχωρώντας τον τύπο =D5 στο κελί D13, εμφανίζοντας ολόκληρη τη βέλτιστη λύση σε συνεχόμενα κελιά.

Εάν ένα πρόβλημα δεν διαθέτει εφικτή λύση, το Solver θα εκτυπώσει το μήνυμα “Solver could not find a feasible solution” (“Το Solver δεν μπόρεσε να βρει μια εφικτή λύση”). Αν η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι φραγμένη (μη πεπερασμένη), το Solver θα εμφανίσει το ασαφές μήνυμα “The Set Cell values do not converge” (“Οι τιμές του κελιού προορισμού δεν συγκλίνουν!”). Σε κάθε περίπτωση, το μήνυμα υποδεικνύει ότι υπάρχει κάτι λανθασμένο με τη διατύπωση, όπως θα σχολιαστεί στην Ενότητα 3-5.

Το πλαίσιο διαλόγου **Solver Results** παρέχει την ευκαιρία να ζητήσουμε περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη λύση, συμπεριλαμβανομένης της σημαντικής αναφοράς της ανάλυσης ευαισθησίας. Θα συζητήσουμε αυτά τα πρόσθετα αποτελέσματα στην Ενότητα 3-6.4.

Η επίλυση του μοντέλου της Reddy Mikks με το Solver είναι άμεση. Άλλα μοντέλα ίσως απαιτήσουν κάποια δόση επινοητικότητας πριν μπορέσουν να δημιουργηθούν. Μία κατηγορία προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που εμπίπτει σε αυτή την κατηγορία πραγματεύεται το πρόβλημα της βελτιστοποίησης δικτύων όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6.

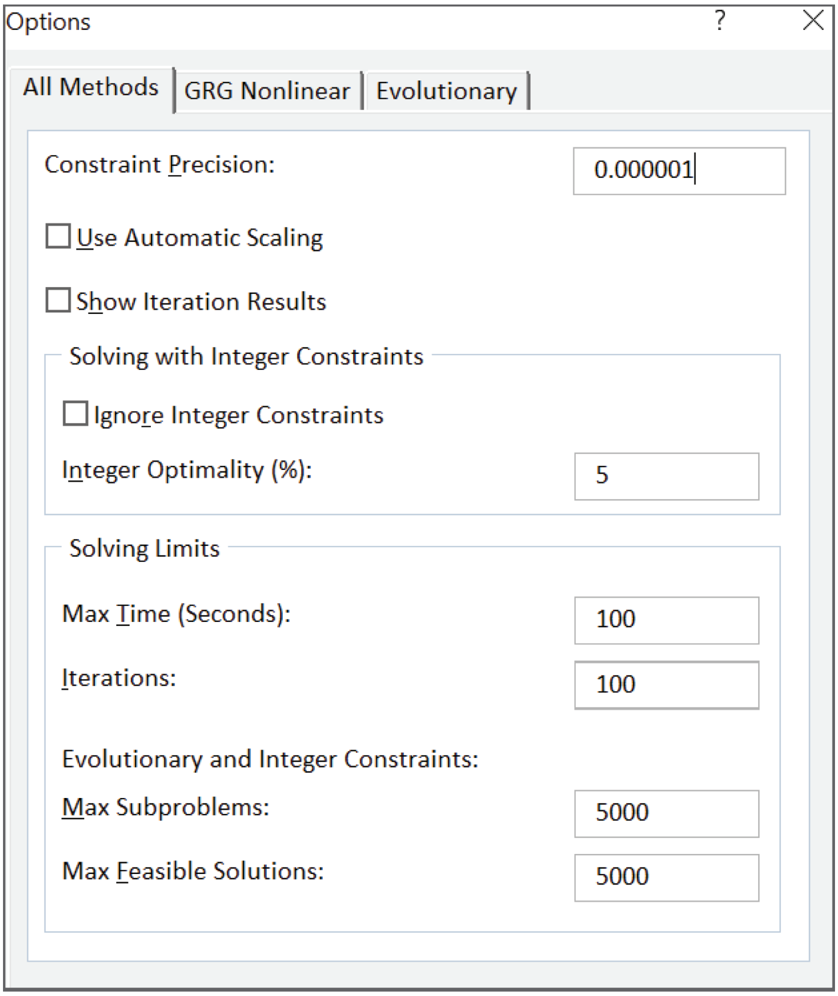
2-3.2 Επίλυση προβλημάτων LP με την AMPL

Αυτή η ενότητα[3] παρέχει μία συνοπτική εισαγωγή στην AMPL. Το υλικό του Κεφαλαίου 24, εκθέτει λεπτομερώς το συντακτικό της AMPL και θα αποτελεί παραπομπή στην ενότητα αυτή και σε άλλες παρουσιάσεις της AMPL στο βιβλίο.

[1]Εάν η εφαρμογή Solver δεν εμφανίζεται στο Data menu του Excel, επιλέξτε Excel Office Button ⟶ Excel Options ⟶ Add Ins ⟶ Solver Add-in ⟶ OK; στη συνέχεια, κλείστε και ανοίξτε εκ νέου την εφαρμογή του Excel.

[2]Στο πλαίσιο διαλόγου **Add Constraint** της Εικόνας 2-4 οι δύο επιπλέον επιλογές **int** και **bin** - που αντιπροσωπεύουν **int**eger (ακέραιος) και **bin**ary (δυαδικός) χρησιμοποιούνται με ακέραια προγράμματα για να περιορίσουν τις μεταβλητές σε ακέραιες ή δυαδικές τιμές (δες Κεφάλαιο 9).

[3]Για λόγους ευκολίας, η τελευταία φοιτητική έκδοση της AMPL είναι διαθέσιμη από το δικτυακό τόπο www.ampl.com. Η AMPL που χρησιμοποιείται σε αυτό το βιβλίο απαιτεί τη χρήση της γραμμής εντολών. Ο δικτυακός τόπος της AMPL προσφέρει μία διεπαφή για το περιβάλλον των Windows.



Σχήμα 2-5 Το πλαίσιο διαλόγου Solver Options

Το πρόβλημα της Reddy Mikks - ένα Στοιχειώδες Μοντέλο Η AMPL παρέχει την ευχέρεια εκμάθησης της μοντελοποίησης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε μία στοιχειώδη και χωρίς συντομεύσεις μορφή γραφής. Η Εικόνα 2-7 δίνει τον αυτεξήγητο κώδικα του μοντέλου της Reddy Mikks (αρχείο *amplRM1.txt*). Στην AMPL λαμβάνεται υπόψη η διαφορά ανάμεσα στους κεφαλαίους και στους μικρούς χαρακτήρες. Όλες οι δεσμευμένες λέξεις - κλειδιά είναι γραμμένες με έντονη γραφή. Όλα τα υπόλοιπα ονόματα καθορίζονται από το χρήστη. Η αντικειμενική συνάρτηση καθώς και κάθε ένας από τους περιορισμούς θα πρέπει να έχουν διακριτά ονόματα (καθορισμένα από το χρήστη), ακολουθούμενα από άνω κάτω τελεία. Κάθε εντολή τελειώνει με ένα ελληνικό ερωτηματικό.

Η χωρίς συντομεύσεις μορφή γραφής αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπό την έννοια ότι απαιτείται ένας νέος κώδικας οποτεδήποτε αλλάζουν τα δεδομένα εισόδου. Για τα πρακτικά προβλήματα (με πολύπλοκη δομή και ένα μεγάλο πλήθος μεταβλητών και περιορισμών), αυτός ο τρόπος γραφής είναι στην καλύτερη περίπτωση, βραδυκίνητος. Η AMPL μετριάζει αυτήν τη δυσκολία, επινοώντας έναν κώδικα που διαιρεί το πρόβλημα σε δύο μέρη: (1) Ένα γενικό αλγεβρικό μοντέλο για συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων εφαρμόσιμο σε οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών και περιορισμών, και (2) δεδομένα για την καθοδήγηση του αλγεβρικού μοντέλου. Η υλοποίηση αυτών των δύο σημείων διεκπεραιώνεται στην επόμενη ενότητα χρησιμοποιώντας το πρόβλημα της Reddy Mikks.

Το πρόβλημα της Reddy Mikks - ένα Αλγεβρικό Μοντέλο Το Σχήμα 2-8 περιέχει τις εντολές του μοντέλου (αρχείο *amplRM2.txt*). Το αρχείο θα πρέπει απαρεγκλίτως να είναι αρχείο κειμένου (ASCII). Το σύμβολο ♯ καθορίζει την έναρξη επεξηγηματικών σχολίων. Τα σχόλια μπορούν να εμφανίζονται είτε σε μία ξεχωριστή γραμμή είτε να ακολουθούν το ελληνικό ερωτηματικό στο τέλος μιας εντολής. Η γλώσσα κάνει διάκριση μεταξύ πεζών - κεφαλαίων γραμμάτων και όλες οι λέξεις κλειδιά, με λίγες εξαιρέσεις, γράφονται με μικρά γράμματα (ανατρέξτε στο Κεφάλαιο 24).

Το αλγεβρικό μοντέλο AMPL θεωρεί το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με n μεταβλητές και m περιορισμούς στην ακόλουθη γενικευμένη μορφή:

$$\textbf{Μεγιστοποίησε} \quad z : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$